Übungen

Abgabetermin: Freitag 25.6. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46

THEMEN: Produkträume, Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte und faktorisierte bedingte Erwartung

Aufgabe 36 (5 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P) = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}_0}(\mathbb{R}, \mathbb{B}, Poi(n))$, wobei $Poi(n)$ eine Poisson-Verteilung mit Parameter n bezeichnet (d.h. eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Zähldichte $p(k) = \frac{n^k}{k!}e^{-n}\mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(k)$), und $X : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}_0$ eine Abbildung mit

$$X(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 | \omega_n > 0\}, \ \inf\emptyset := \infty.$$

a) Zeigen Sie: X ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{P}(\overline{\mathbb{N}}_0)$-messbar.

b) Zeigen Sie: P^X ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}_0$ mit Zähldichte
$$q(n) = e^{-\frac{(n-1)n}{2}}(1 - e^{-n})\mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(n).$$

Aufgabe 37 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, verteilter Zufallsgrößen und $Y_n := \min_{1\le i\le n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y_n.

b) Bestimmen Sie eine Version von $P(X_1 = Y_n | X_1 = x)$, $x \in [0, \infty)$, und damit $P(X_1 = Y_n)$.

c) Bestimmen sie eine Version von $E(Y_n | Y_k = x)$ für $k < n$.

Aufgabe 38 (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Funktion um eine $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte handelt:
$$f(x, y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-y^2(x-y)^2/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\times[1,\infty)}(x, y)$$

b) Es sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit der $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte f aus Teil a). Zeigen Sie, dass $E(X|Y = y) = y$ P^Y-f.s. gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 39 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter und integrierbarer Zufallsvariablen, sowie N eine von allen X_n stochastisch unabhängige, integrierbare, $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable. Definiere $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$.

a) Zeigen Sie die Integrierbarkeit von S_N und bestimmen Sie $E(S_N)$.

b) Bestimmen Sie $E(S_N|N = n)$ elementar und mit Satz 52.5 aus der Vorlesung.

c) Bestimmen Sie $E(S_N|N)$.